BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ
№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2009

АЛГОРИТМ ПРОГОНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ТРЕХТОЧЕЧНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Р.Т.ЗУЛЬФУГАРОВА, М.М.МУТАЛЛИМОВ, А.П.ГУЛИЕВ
Институт Прикладной Математики БГУ
renafred@yandex.ru

В работе на основе метода "прогонки" предлагается вычислительный алгоритм для решения задачи оптимального управления с неразделёнными трёхточечными краевыми условиями, который приводит нахождение начальных условий к решению соответствующей системы линейных алгебраических уравнений с симметричной главной матрицей. Такой подход улучшает обусловленность исходной задачи. Результаты иллюстрируются конкретными примерами.

1. Введение. Решения многих задач механики и процессов управления [1], выбора программных траекторий и управления [2] сводится к двухточечным, трёхточечным и многоточечным краевым задачам. Для решения задачи управления с двухточечными краевыми условиями в настоящее время имеются разные вычислительные алгоритмы как алгоритмы, повышающиеся размерность исходной системы [3] и опирающиеся на решения соответствующих дифференциальных уравнений Гамильтона [4], так и алгоритмы, не повышающие размерность исходной задачи [5]. На примере построения программной траектории и управления двуногого шагающего аппарата (ША) [5] показано, что алгоритмы из [3] сталкиваются с определенными трудностями, которые связаны с тем, что плохо обусловленность матрицы Гамильтона сопровождает их алгоритм вплоть до решения соответствующих линейных алгебраических уравнений. Поэтому в [6-8] предложен метод прогонки для решения рассматриваемой задачи. Вопросы обусловленности этих задач подробно анализированы в [9, 10], именно в [10] показывается, что алгоритм прогонки [8,5] дает более хороший результат. В задачах оптимизации с трёхточечными краевыми условиями возникает иная картина, т.е. сопряженный множитель Лагранжа претерпевает разрыв во внутренней точке [4, 11], и поэтому непосредственные применение методов решения двухточечных краевых задач к задачам оптимизации с трёхточечными краевыми условиями не представляется возможным. Об этом упоминается в работе [11], где предлагается алгоритм, повышающий размерности исходной задачи. Однако, при большой размерности исходной системы такой подход может встречаться определенными трудностями. Другим подходом решения задачи оптимального управления с многоточечными краевыми условиями является метод, изложенный в [12], где требуется совпадение размерности краевых условий с размерностью уравнения движения.

В настоящей работе идея прогонки [5-8] модифицируется для решения задачи оптимального управления с трёхточечными краевыми условиями, где совпадение размерности краевых условий с размерностью уравнения движения не требуется. Улучшение обусловленности [10] соответствующих систем линейных алгебраических уравнений при решении двухточечных краевых задач оптимального управления [9] позволяет использовать метода прогонки [8] для решения многоточечных краевых задач.

2. Постановка задачи. Допустим, что рассматриваемый процесс описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = F(t)x(t) + G(t)u(t) + v(t), \quad t \in [0,T], \tag{2.1}$$

с трехточечными краевыми условиями

$$\Phi_1 x(0) + \Phi_2 x(\tau) + \Phi_3 x(T) = q, \qquad \tau \in (0,T), \tag{2.2}$$

где требуется минимизировать функционал

$$J = \frac{1}{2}\int_0^T \left[x'(t)Q(t)x(t) + u'(t)C(t)u(t)\right]dt, \tag{2.3}$$

здесь $x(t)$ - n-мерный фазовый вектор, $u(t)$ - m-мерный вектор управляющих воздействий, $v(t)$ - n-мерный вектор, $F(t), G(t)$ - матрицы размерности $n \times n$ и $n \times m$, соответственно, Φ_i ($i = \overline{1,3}$) матрицы размерности $k \times n$, q - k-мерный вектор, $Q(t) = Q'(t) \geq 0, C(t) = C'(t) > 0$ матрицы, размерности $n \times n$ и $m \times m$, соответственно.

3. Метод решения. В работе [13] предложен метод прогонки [5], суть которого получение начального условия $x(0) = x_0$ из трёхточечного краевого условия (2.2). Как показана в [13] для определения $x(0)$ получается система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{bmatrix} S(0) & N(0) + \Phi_1' \\ N'(0) + \Phi_1 & n(0) + n(\tau + 0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega(0) \\ q - W(0) - W(\tau + 0) \end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

где $S(t)$, $N(t)$ и $\omega(t)$ неизвестные функции. Эти функции удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{S}(t) &= -F'(t)S(t) - S(t)F(t) + S(t)M(t)S(t) - Q(t), \\ \dot{N}(t) &= \left[S(t)M(t) - F'(t)\right]N(t), \\ \dot{\omega}(t) &= \left[S(t)M(t) - F'(t)\right]\omega(t) - S(t)v(t), \end{aligned} \tag{3.2}$$

с начальными условиями в точке $t = T$

$$S(T) = 0, \quad N(T) = \Phi_3', \quad \omega(T) = 0, \quad N(\tau + 0) = N(\tau - 0) - \Phi_2', \tag{3.3}$$

здесь $M(t) = G(t)C^{-1}(t)G'(t)$, далее $n(t)$ и $W(t)$ определяются из следующих дифференциальных уравнений

$$\dot{n}(t) = N'(t)M(t)N(t),$$
$$\dot{W}(t) = N'(t)[M(t)W(t) - v(t)] \qquad (3.4)$$

на интервале $\tau + 0 < t < T$ с начальными условиями $n(T) = 0,\quad W(T) = 0$ и на интервале $0 < t < \tau - 0$ с начальными условиями $n(\tau - 0) = 0,\ W(\tau - 0) = 0$. Решая систему линейных алгебраических уравнений (3.1), мы находим $x_0 = x(0)$ и γ, затем управление $u(t)$ определяется

$$u(t) = C^{-1}(t)G'(t)(S(t)x(t) + N(t)\gamma + \omega(t)), \qquad (3.5)$$

а $x(t)$ как решение задачи Коши

$$\dot{x}(t) = (F(t) + M(t)S(t))x(t) + M(t)N(t)\gamma + M(t)\omega(t) + v(t) \qquad (3.6)$$

с начальным условием $x(0) = x_0$.

Исходя из вышеуказанных формул можно построить следующий алгоритм для решения задачи (2.1)-(2.3):

1. Формируются $F(t),\ G(t),\ v(t),\ \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, q, Q(t), C(t)$.
2. Решая задачу (3.2)-(3.3) определяются функции $S(t),\ N(t)$ и $\omega(t)$.
3. Определяются решения уравнения (3.4) – функции $n\ \ (t)$ и $W\ \ (t)$.
4. Решая систему линейных алгебраических уравнений (3.1) определяются $x_0 = x(0)$ и γ.
5. Определяется $u(t)$ по формуле (3.5).
6. Из уравнения (3.6) получается решение $x(t)$.

Как видно из вышеизложенного алгоритма, для получения решения нам необходимо решать уравнение Риккати и систему дифференциальных уравнений. Чтобы продемонстрировать работоспособность алгоритма, мы воспользуемся простым методом Рунге-Кутта.

Сначала приведем начальное условие в точке $t = T$ к начальному условию в точке $t = 0$. Это преобразование проиллюстрируем на примере первого уравнения (3.2). Пусть

$$\dot{S}(t) = -F'(t)S(t) - S(t)F(t) + S(t)M(t)S(t) - Q(t), \qquad (3.7)$$
$$S(t_1) = S^0,$$

здесь вводя $\tau = t_1 - t$ и обозначая $S(t) = S(t_1 - \tau) = \overline{S}(\tau)$ из (3.7) получим:

$$\dot{\overline{S}}(\tau) = -F'\overline{S}(\tau) - \overline{S}(\tau)F + \overline{S}(\tau)MS(\tau) - Q, \qquad (3.8)$$
$$\overline{S}(0) = S^0, \qquad 0 \le \tau \le t_1.$$

Аналогичное преобразование можно сделать и для остальных уравнений (3.2) и (3.4).

Сейчас рассмотрим случай, когда $Q(t) = 0$ и $v(t) = 0$. Тогда из (3.2) получим $S(t) \equiv 0,\ \omega(t) \equiv 0$, а остальные функции $\overline{N}(t), \overline{n}(t)$ и $\overline{W}(t)$ будут решениями дифференциальных уравнений

$$\dot{\overline{N}}(t) = -F'(t)\overline{N}(t),$$
$$\dot{\overline{n}}(t) = \overline{N}'(t)M(t)\overline{N}(t), \qquad (3.9)$$
$$\dot{\overline{W}}(t) = \overline{N}'(t)[M(t)\overline{W}(t)]$$

с начальными условиями $\overline{N}(0) = \Phi_3{}'$, $\overline{n}(0) = 0$, $\overline{W}(0)$ для интервала $0 < t < \tau - 0$ и $\overline{n}(\tau + 0) = 0$, $\overline{W}(\tau + 0) = 0$ для интервала $\tau + 0 < t < T$. Отметим, что при $\tau = \dfrac{T}{2}$ из последнего условия (3.3) получаем

$$\overline{N}(\tau - 0) = \overline{N}(\tau + 0) - \Phi_2{}'. \qquad (3.10)$$

Полученная система дифференциальных уравнений (3.9) более удобна для применения метода Рунге-Кутта.

$$\overline{N}(t_{i+1}) = N(t_i) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4),$$

где $k_1 = -F'\overline{N}(t_i)$, $k_2 = -F'\left(\overline{N}(t_i) + k_1 \cdot \dfrac{h}{2}\right)$,

$$k_3 = -F'\left(\overline{N}(t_i) + k_2 \cdot \frac{h}{2}\right), \quad k_4 = -F'\left(\overline{N}(t_i) + k_3 \cdot h\right), \qquad h = \frac{t_{i+1} - t_i}{h}.$$

Отметим, что условие (3.10) несколько затрудняет применение метода Рунге-Кутта к решению уравнений (3.9). Для преодоления этой трудности интервал $[0,T]$ разбивается на n равных частей, таким образом, чтобы точка $t = \tau$ совпала с одним из узловых точек t_i. Тогда, мы сначала используя начальное условие $\overline{N}(0) = \Phi_3{}'$ получим решения на интервале $(0, \tau + 0)$, а затем используя его в качестве начального условия получаем решение на всем интервале $(0,T)$. Для нахождения функции $\overline{n}(t)$ и $\overline{W}(t)$ также применяется метод Рунге-Кутта, но здесь в каждом из интервалов $(0,\tau)$ и (τ,T) соответствующие дифференциальные уравнения решается автономно.

Для $\overline{n}(i)$ обозначив $R(i) = N'(i)MN(i)$ и

$$k_1 = N'(t_i)MN(i), \qquad k_2 = R(i)\left(E + k_1 \cdot \frac{h}{2}\right),$$

$$k_3 = R(i)\left(E + k_2 \cdot \frac{h}{2}\right), \qquad k_4 = R(i)(E + h \cdot k_3),$$

$$n(i+1) = n(i) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Далее, и для $\overline{W}(i)$ обозначив $P(i) = N'(i)M\overline{W}(i)$

$$k_1 = N'(t_i)M\overline{W}(i), \qquad k_2 = P(i)\left(E + k_1 \cdot \frac{h}{2}\right),$$

$$k_3 = P(i)\left(E + k_2 \cdot \frac{h}{2}\right), \qquad k_4 = P(i)(E + h \cdot k_3),$$

$$\overline{W}(i+1) = \overline{W}(i) + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4).$$

Таким образом, применяя метод Рунге-Кутта для $\overline{n}, \overline{W}$ получаем соответственное решение. Решая систему линейных алгебраических уравнений (3.1) получаем начальную условию $x(0)$ и множителя Лагранжа γ. При $S(t) \equiv 0$ из систем дифференциальных уравнений (3.5), (3.6) вычисляется $x(t_i)$ методом Рунге-Кутта.

Пример. Рассмотрим задачу управления штанго-насосными установками, которая сводится к задаче оптимального управления с трёхточечными краевыми условиями. Пусть как в [11] $b = 1$, $m = 1720$, $k = 0$,

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b}{m} & -\frac{k}{m} \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \overline{m} \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$x_0 = 1,\ x_0' = 0,\ x_\tau = 946.0073,\ x_\tau' = 1586{,}6,\ x_T = 1,\ x_T' = 3007{,}3$.

И в (2.2)

$$\Phi_1' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \Phi_2' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_3' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad q' = [x_0 \quad x_0' \quad x_\tau \quad x_\tau' \quad x_T \quad x_T'].$$

Отметим, что этот случай соответствует разделенной трехточечной краевой задаче, которую в принципе можно решать последовательно на каждом отрезке как двухточечная краевая задача. Полученные численные результаты позволили нам составлять следующую таблицу при различных число шагов n:

Таблица 1

$\times 10^3$	Заданные значения $x(t)$	$n = 100$	1000	2000	3000
$x(0)$	1	1	1	1	1
$x'(0)$	0	0	0	0	0
$x(\tau)$	946,0073	919,8	943,7	944,9	945,3
$x'(\tau)$	1586,6	1837,1	1614,6	1600,7	1596,0
$x(T)$	1	0,9547	1,0076	1,0104	1,0114
$x'(T)$	3007,3	2788,0	2984,1	2995,7	2998,5

Как видно из таблицы 1, при увеличении числа n значения функции, полученные как решение уравнения (3.6) в точках $t = 0, \tau, T$,приближаются к соответствующим заданным краевым значениям.
Сейчас рассмотрим случай, когда

$$\Phi_1' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \Phi_2' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_3' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad q' = \begin{bmatrix} x_0 & x_0' & x_\tau & x_T & x_T' \end{bmatrix}.$$

В задаче управления штанго-насосными установками этот случай соответствует случаю [11,с.36-45], когда в верхней части скорость плунжера определяется самой системой, что позволяет сэкономить энергию. Для этого случая результаты иллюстрируются следующей таблицей для различных число шагов n .

Таблица 2

$\times 10^3$	Заданные значения $x(t)$	$n = 100$	200	500	1000	5000	10000
$x(0)$	1	1	1	1	1	1	1
$x'(0)$	0	0	0	0	0	0	0
$x(\tau)$	946,0073	923,0	935,2	941,9	944,0	945,6	945,8
$x(T)$	1	1,1270	1,1355	1,1413	1,1433	1,1450	1,1454
$x'(T)$	3007,3	2857,4	2926,4	2973,5	2990,1	3003,8	3005,6

Более интересной является случай, когда

$$\Phi_1' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \Phi_2' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_3' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad q' = \begin{bmatrix} x_0 & 0 & x_\tau & x_T \end{bmatrix}.$$

В этом случае, в верхней части скорость плунжера определяется самой системой, а также на скорость движения налагается условия периодичности. Отметим, что граничные условия при этом получаются неразделенными и к этой задаче уже невозможно применять стандартную процедуру решения двухточечной краевой задачи.

Таблица 3

$\times 10^3$	Заданные значения $x(t)$	n =100	200	300	1000
$x(0)$	1	1	1	1	1
$x(\tau)$	946,0	928,8	938,1	940,9	944,6
$x(T)$	1	1,0085	1,0025	1	0,9961

Из таблицы 3 видно, что $\|x(0)-x(T)\|<10^{-3}$. Отметим, что рассмотренные примеры решены с помощью метода Эйлера, результаты которого даны в [14]. Как показывает сравнение этих результатов, метод Рунге-Кутта улучшает точность вычислений.

Необходимо отметить, что коэффициенты для определения $x(t)$, $u(t)$ из (3.5), (3.6) совпадают с коэффициентами соответствующей задачи оптимальной стабилизации. А это, в свою очередь, существенно снижает используемых ресурсов для решения общей задачи оптимального управления (построение программных траекторий и управления), оптимальная стабилизация около $x(t)$, $u(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бордюг В.Л., Ларин В.Б., Тимошенко А.Г. Задачи управления шагающими аппаратами. Киев: Науково Думка, 1985, 263 с.
2. Ларин В.Б. Управление шагающими аппаратами. Киев: Науково Думка, 1980, 168 с.
3. Абрамов А.А. О переносе граничных условий для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1961, т.1, № 2, с.542-545.
4. А.Брайсон, Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972, 544 с.
5. Алиев Ф.А. Методы решения прикладных задач оптимизации динамических систем. Баку: Элм, 1989,320 с.
6. Максудов Ф.Г., Алиев Ф.А. Оптимизация импульсных систем с неразделенными двухточечными граничными условиями // ДАН СССР, 1985, т.280, № 4, с.796-798.
7. Алиев Ф.А. Задача оптимального управления линейной системой с неразделенными двухточечными краевыми условиями // Дифференциальные уравнения, 1986, № 2, с. 345-347.
8. Алиев Ф.А. Задача оптимизации с двухточечными краевыми условиями // Известия АН СССР, Техническая кибернетика, 1985, № 6, с. 138-146.
9. Ларин В.Б. .О симметризации двухточечной краевой задачи // Проблемы управления и информатики, 2002, № 3, с. 30-37.
10. Aliev F.A. Larin V.B., Akin O., Dogan N., Sayan N., Ismailov N.A. On a simmetrization of the boundary value problem // Applied and Computational Mathematics an International Journal. v. 1, №1, 2002, p.69-80.
11. Алиев Ф.А., Муталлимов М.М. Алгоритмы решения задачи оптимального управления с трехточечными неразделенными краевыми условиями // Проблемы управления и информатики, 2005, № 4, с. 36-45.
12. Aida-zade K.R., Abdullayev V.M. Numerical solution of optimal control problems with unsepareted conditions on phase state // Applied and Computational Mathematics an International Journal. v.4, №2, 2005, p.165-177.
13. Муталлимов М.М. Алгоритм "прогонки" для решения задачи оптимизации с неразделенными трехточечными краевыми условиями // Доклады НАН Азербайджана, 2007, т. 43, № 2, с.24-29.
14. Муталлимов М.М., Гулиев А.П., Зульфугарова Р.Т. Вычислительный алгоритм для решения задач оптимального управления с трехточечными краевыми условиями // Известия НАНА, т. 27, №2-3, 2007, с.115-120.

ÜÇNÖQTƏLİ AYRILMAYAN SƏRHƏD ŞƏRTLİ OPTİMAL İDARƏETMƏ MƏSƏLƏSİ ÜÇÜN «QOVMA» ÜSULU

R.T.ZÜLFÜQAROVA, M.M.MÜTƏLLİMOV, A.P.QULİYEV

XÜLASƏ

İşdə üçnöqtəli ayrılmayan sərhəd şərtli optimizasiya məsələsinin həlli üçün "qovma" üsulu əsasında hesablama alqoritmi təкlif olunur кi, bu da başlanğıc şərtlərinin tapılmasını baş matrisi simmetriк olan uyğun xətti cəbri tənliкlərin həllinə gətirir. Belə yanaşma verilən məsələnin təminatlığını yaxşılaşdırır. Nəticələr кonкret misallarla nümayiş etdirilir.

SWEEP ALGORITM FOR SOLVING OPTIMAL CONTROL PROBLEM WITH THREE-POINT NONSEPARATED BOUNDARY CONDITIONS

R.T.ZULFUGAROVA, M.M. MUTALLIMOV, A.P.GULIYEV

SUMMARY

On the basis of the "sweep" method the paper presents the computing algorithm for the solution of the optimal control problem with nonseparated three-point boundary conditions which allow to reduce the obtaining of initial conditions to solution of corresponding linear-algebraic equations with symmetric main matrix. Such approach improves conditionality of the initial problem. The results are illustrated with concrete examples.